Die Schweizer Mathematik-Olypmiade

Maret Arnaud, ETH Zürich, arnaud@imosuisse.ch
Übersetzung: Patrick Stadler, EPF Lausanne, patrick@imosuisse.ch

1 Die Mathematik-Olympiade

Die Internationale Mathematik-Olympiade (IMO) ist ein weltweiter Wettbewerb für Gymnasiastinnen und Gymnasiasten [2]. Die IMO findet jedes Jahr anfangs Juli in einem anderen Land statt und feiert im Jahr 2019 ihr 60-jähriges Jubliäum. Mit mehr als 100 teilnehmenden Ländern aus allen Kontinenten ist die IMO der bekannteste Mathematik-Wettbewerb auf voruniversitärer Stufe. Mehrere grosse Namen der Mathematik, wie Grigori Perelman oder Stanislav Smirnov, sind im Besitz von IMO-Medaillen. Zudem ist eine gute Leistung an einer IMO ein berücksichtigtes Argument für die Kandidatur an einer Universität. Nach der olympischen Tradition kann jedes Land 6 Teilnehmer an jede IMO schicken.

Die Schweiz nimmt seit mehr als zwanzig Jahren an der IMO teil. Die nationale Selektion sowie die Schweizer Mathematik-Olympiade sind von der Organisation imosuisse organisiert [1]. Weil der Verein beinahe nur aus ehemaligen Teilnehmern besteht, welche neben ihrem Studium freiwillig für den Verein tätig sind, besitzt er eine junge und dynamische Atmosphäre. Neben der IMO nimmt die Schweiz auch jedes Jahr an anderen internationalen Olympiaden teil: Die Europäische Frauen-Mathematik-Olypmiade (EGMO) und die Mitteleuropäische Mathematik-Olypmiade (MEMO).

Die EGMO ist ein seit mehreren Jahren organisierter Wettbewerb, der das Ziel hat, Mädchen zu ermutigen, an den Mathematik-Olympiaden mitzumachen [3]. Weil es sehr wenige Teilnehmerinnen an der IMO gab, hat ein Kommite entschieden, die EGMO zu gründen um so für einen grösseren Frauenanteil an der IMO zu sorgen. Die Schweiz sucht jedes Jahr aktiv neue junge Studentinnen, die motiviert sind, Olympiadeaufgaben zu lösen, um das EGMO-Team zusammenzustellen. Die EGMO findet jedes Jahr im April in einem anderen europäischen Land statt und dauert eine Woche.

Die MEMO ist die Vorstufe der IMO und erlaubt es 6 Teilnehmern, welche nicht an die IMO gehen konnten, trotzdem noch an einer internationalen Olympiade teilzunehmen. Eine Besonderheit der MEMO ist der zusätzliche Teamwettbewerb, der nach dem normalen Einzelwettbewerb stattfindet. Beim Teamwettbewerb arbeiten alle Teilnehmer eines Landes gemeinsam an der gleichen Prüfung. Dadurch werden die Sozialkompetenzen gestärkt und die Teilnehmenden haben die Möglichkeit, ihre Arbeitsmethoden zu vergleichen. An der MEMO nehmen zehn mitteleuropäische Länder teil, welche abwechslungsweise die Gastgeberrolle übernehmen. Sie findet Ende August statt und dauert auch eine Woche.

Jedes Jahr finden mehrere Qualifikationsrunden statt. Die sechs besten Gymnasiasten dürfen die Schweiz an der IMO vertreten und die vier besten Mädchen dürfen zudem an der EGMO teilnehmen. Die Vorrunde, an welcher alle Jugendlichen unter zwanzig Jahre teilnehmen dürfen, findet Anfang Dezember statt. Die 25 besten Teilnehmer qualifizieren sich für die Finalrunde im März. Die besten zwölf werden ausgewählt, an der IMO-Selektion im Mai teilzunehmen. Die besten sechs Teilnehmenden bilden das nationale Team. Die nachfolgenden 6 Besten qualifizieren sich für die MEMO. Alle Prüfungen werden jeweils auf Deutsch, Französisch und Englisch übersetzt. Auf Anfrage erstellen wir auch eine italienische Prüfung. Den Teilnehmenden dürfen die Sprache frei wählen.

Um die Jugendlichen möglichst gut vorzubereiten, sind vor jeder Runde Vorbereitungstreffen organisiert. Dabei werden den Neulingen an drei Tagen die verschiedenen Prüfungsthemen vorgestellt, damit sie sich an die Mathematik-Olympiade gewöhnen können. Die Mathematik-Olympiade unterscheidet sich vom Schulstoff durch den Inhalt. Sie legt den Schwerpunkt auf die Argumentation und die Beweise und nicht auf methodische Berechnungen (nachzulesen [5]. Spezifische Probleme werden diskutiert und die Jugendlichen haben auch die Gelegenheit, einige Probleme selber zu lösen. Die Treffen finden in der jeweiligen Sprache in Zürich, Lausanne und Lugano statt.

Zudem wird seit diesem Jahr auch ein Junior-Camp im Juni organisiert. Inspiriert von einem Modell, das in anderen Ländern bereits existiert, ist das Junior-Camp für erfolglose Teilnehmer der Vorrunde reserviert, welche noch nicht sechzehn Jahre alt sind. Die logische Argumentation, die Beweisführung und der neue mathematische Stoff sind die Herauforderungen, die an die Jüngsten gestellt werden. Das Junior-Camp bietet die Möglichkeit, mit einer angepassten Geschwindigkeit spielerisch in diesen Bereichen zu trainieren. Ein Schwerpunkt wird auch auf die sozialen Aktivitäten gelegt. Das Junior-Camp ist also ein zusätzlicher Event für diejenigen, die sich nicht für die Finalrunde qualifiziert haben und erhöht deren Qualifikationschancen im das nächste Jahr.

Unter den wichtigsten Terminen im Olympiaden-Kalender ist die Lagerwoche Anfang März, welche für die Teilnehmenden der Finalrunde reserviert ist. Sie wird durch die beiden Prüfungen der Finalrunde abgeschlossen. Während dieser Woche lösen die Jugendlichen den ganzen Tag Mathematikaufgaben und nehmen an sozialen Aktivitäten, also vor allem Spielen, am späten Nachmittag und am Abend teil. Es ist uns wichtig, eine kollegiale Atmosphäre beizubehalten und nicht den Wettbewerbsgedanken zu verstärken. Die Teilnehmenden sind eingeladen, ihre Argumentationen auszutauschen und gemeinsam an den hartnäckigsten Problemen zu arbeiten. Wir versuchen, wenn möglich, ihre Neugier zu wecken und sie für die Schönheit der mathematischen Argumente zu sensibilieren.

Abbildung 1 – Programm der Schweizer Mathematik-Olympiade für das Jahr 2018/2019

Wir arbeiten seit einigen Jahren daran, die Mathematik-Olympiaden zu popularisieren, damit sie anerkannte und feste Events werden bei allen Mathematikbegeisterten der Schweiz. Alle Mathematiklehrer der Schweiz werden deshalb gebeten, die Schweizer Mathematik-Olympiade ihren Schülerinnen und Schülern vorzustellen und die besten zu motivieren, sich für die Vorbereitungstreffen einzuschreiben. Alle notwendigen Informationen sind auf unserer Webseite verfügbar [1]. Die Teilnahme ist komplett gratis, sogar die Transportkosten werden zurückerstattet. Neben der Mathematik bietet die Olympiade eine Möglichkeit, zu reisen und neue Freundschaften mit anderen Jungendlichen aus der ganzen Welt zu schliessen. Wir sind überzeugt, dass dabei menschlich bereichernde Erfahrungen gemacht werden.

2 Ein Beispiel für unterwegs

Habt keine Angst ! Auch wenn die Olympiade-Aufgaben manchmal etwas schwierig erscheinen - manchmal selbst für Professionelle kaum lösbar - gibt es mit der angemessenen Einarbeitung nichts zu befürchten. Das folgende Problem soll das illustrieren. Es wurde auf diese Art an der IMO 2011 in Amsterdam gestellt. Nach einem grossen Teil der Experten der Olympiaden-Welt handelt es sich um eines der schönsten Probleme, das jemals an einer IMO vorgeschlagen wurden. Die Aufgabenstellung ist folgende:

> **IMO 2011, Problem 2.** Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Dabei wird angenommen, dass keine drei Punkte von $\mathcal{S}$ kollinear sind. Als Windmühle bezeichnen wir einen Prozess der folgenden Art. Wir starten mit einer Geraden ℓ, die genau einen Punkt P von $\mathcal{S}$ enthält. Die Gerade ℓ wird im Uhrzeigersinn um den Drehpunkt P so lange gedreht, bis sie zum ersten Mal auf einen weiteren Punkt aus $\mathcal{S}$, der mit Q bezeichnet sei, trifft. Die Gerade wird weiter im Uhrzeigersinn mit Q als neuem Drehpunkt gedreht, bis sie wieder auf einen Punkt aus $\mathcal{S}$ trifft. Dieser Prozess wird unbegrenzt fortgesetzt. Man beweise, dass für geeignete Wahl eines Punktes P von $\mathcal{S}$ und einer Ausgangsgeraden ℓ, die P enthält, die resultierende Windmühle jeden Punkt aus $\mathcal{S}$ unendlich oft als Drehpunkt hat.

Wenn man nur die nachfolgende Lösung liest, erscheint das Problem einfach. Die Argumente der Lösung sind einfach zu verstehen und erfordern kein kompliziertes mathematisches Werkzeug. Und das ist die ganze Schöhnheit der Olympiade-Probleme. Kurze Aufgabenstellungen, die raffinierte Beweise ohne fortgeschrittene mathematische Techniken erfordern. Diese Schöhnheit ist aber auch die Quelle der Schwierigkeit, den die Lösung ist nicht immer einfach zu finden.

Nun zur Lösung: Man wählt einen Punkt und eine Gerade. Wir verändern unsere Sichtweise und vermuten, dass zwei Punkte von $\mathcal{S}$ sich nicht auf der gleichen vertikalen Gerade befinden. Anschliessend wird ein Punkt P von $\mathcal{S}$ gewählt, sodass die vertikale Gerade durch P die anderen Punkte von $\mathcal{S}$ in zwei Teilmengen teilt, welche ein Grössenunterschied von höchstens 1 haben (Wenn die Anzahl der Elemente in $\mathcal{S}$ ungerade ist, kann P so gewählt werden, dass die beiden Teilmengen gleich gross sind, wenn $\mathcal{S}$ eine gerade Anzahl Elemente besitzt, dann hat eine Teilmenge immer mindestens ein Element mehr als die andere). Wir beweisen nun, dass dieser Punkt P und die Gerade ℓ eine Lösung der Aufgabenstellung sind.

Zuerst werden alle Punkte links von ℓ rot gefärbt, die Punkte rechts von ℓ blau und P wird weiss gefärbt. Das Schlüsselargument ist folgendes: Bei jedem Wechsel des Drehpunktes, geht der alte Drehpunkt auf die Seite von ℓ, auf der vorher der neue Drehpunkt war. Wenn man nun die Punkte neu einfärbt für die neue Position von ℓ, links rot, rechts blau und der Drehpunkt weiss, stellt man fest, dass die Anzahl Punkte einer Farbe konstant bleiben.

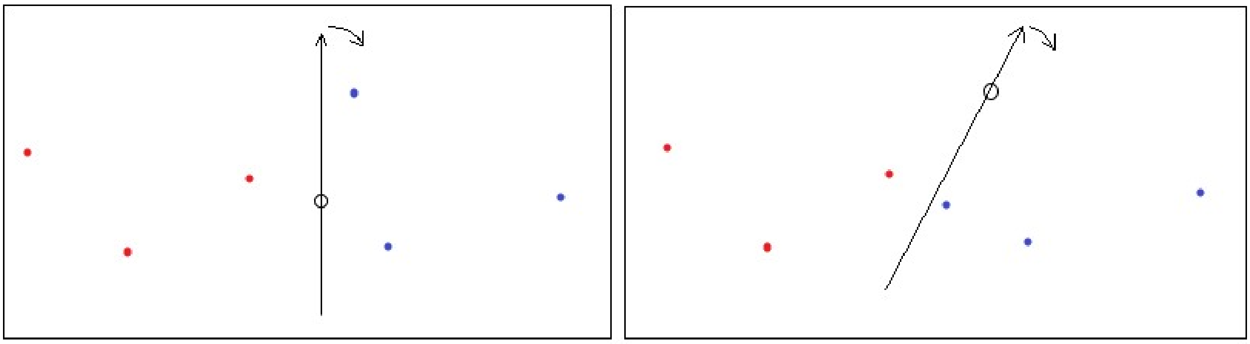

Abbildung 2 – Anfangssituation wenn $\mathcal{S}$ sieben Punkte enthält. Beim ersten Wechsel des Drehpunktes, beobachtet man, dass der alte Drehpunkt nach rechts geht und blau wird, was genau die Farbe des neuen Drehpunkt war, welcher weiss wurde.

Die Gerade ℓ war ursprünglich vertikal. Nach einer bestimmten Anzahl von Wechsel des Drehpunktes, hat sich die Gerade um 180° gedreht. Es ist zu Beginn nicht klar, durch welchen Punkt von $\mathcal{S}$ die Gerade ℓ zu diesem Zeitpunkt gehen wird. Mit der Bedingung, dass die Anzahl Punkte einer Farbe immer gleich bleibt, stellt man aber fest, dass nach einer halben Umdrehung immer noch gleich viele Punkte rot und blau sind. Wegen der halben Umdrehung wurde aber die Bedeutung von rechts und links bezüglich ℓ vertauscht. Das heisst, die roten Punkte sind nun auf der rechten Seite von ℓ und die blauen Punkte auf der linken Seite von ℓ. Also ist der Punkt von $\mathcal{S}$, durch welchen ℓ jetzt geht, entweder P oder einer der beiden Nachbarpunkte von P (bezüglich der horizontalen Distanz.) Somit hat jeder Punkt mindestens einmal die Farbe gewechselt, das heisst, jeder Punkt war einmal der Drehpunkt, wenn ℓ eine halbe Umdrehung gemacht hat. Wenn ℓ eine unendliche Anzahl Umdrehungen macht, wird folglich auch jeder Punkt unendlich oft als Drehpunkt verwendet. QED

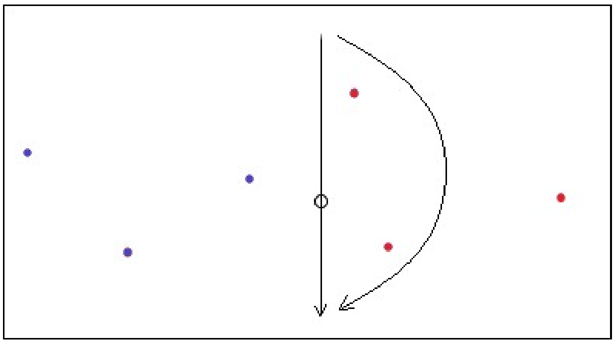

Abbildung 3 – Situation sobald ℓ eine halbe Umdrehung gemacht hat. Aus den oben erklärten Gründen ist der aktuelle Drehpunkt der ursprüngliche Drehpunkt (7 ist ungerade). Da die Gerade ℓ gedreht ist, haben die Punkte ihre Farbe gewechselt.

Links

[1] *Verein Schweizerischer Mathematik-Olympiaden* (www.imosuisse.ch)

[2] *International Mathematical Olympiad* (www.imo-official.org)

[3] *European Girls' Mathematical Olympiad* (www.egmo.org)

[4] *Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden* (www.science.olympiad.ch)

[5] *Couvrez cette calculatrice que je ne saurais voir: le retour du raisonnement à l'école* (https://science.olympiad.ch/fr/actuel/detail/news/news/couvrez-cette-calculatrice-que-je-ne-saurais-voir-le-retour-du-raisonnement-a-lecole/)