Les Olympiades suisses de mathématiques

Maret Arnaud, ETH Zürich, arnaud@imosuisse.ch

1 Les Olympiades de mathématiques

Les Olympiades internationales de mathématiques (OIM) sont une compétition mondiale destinée aux collégiens [2]. L'OIM a lieu chaque année en juillet dans un pays différent et fêtera ses 60 ans d'existence en 2019. Regroupant chaque année plus d'une centaine de pays de tous les continents, elle demeure la compétition de référence au niveau pré-universitaire. Plusieurs grands noms des mathématiques, comme Grigori Perelman ou Stanislav Smirnov, sont en effet d'anciens médaillés de l'OIM. De plus, une bonne performance lors de l'OIM est un argument sérieux pris en compte par les universités pour évaluer un dossier de candidature. Selon la tradition olympique, chaque pays, peu importe sa taille et ses résultats passés, peut envoyer au plus six participants par édition.

La Suisse participe à l'OIM depuis plus d'une vingtaine d'années. La selection nationale, ainsi que les Olympiades suisses de mathématiques (OSM) sont organisées par l'association imosuisse [1]. Constituée presque uniquement d'anciens participants qui œuvrent bénévolement à côté de leurs études, un esprit jeune et dynamique règne dans l'association. En plus de l'OIM, la Suisse participe chaque année à deux autres Olympiades internationales : les Olympiades Européennes de mathématiques pour filles (EGMO) et les Olympiades mathématiques d'Europe centrale (MEMO).

L'EGMO est une compétition organisée depuis une dizaine d'années qui a pour but d'encourager la participation féminine aux Olympiades de mathématiques [3]. En effet, consterné par la très faible proportion de filles à l'OIM, un comité a initié l'EGMO pour populariser les Olympiades de mathématiques auprès de la gente féminine. La Suisse recherche chaque année activement de nouvelles jeunes étudiantes motivées par le défi des Olympiades pour former l'équipe EGMO. L'EGMO a traditionnellement lieu au mois d'avril dans une ville Européenne différente et dure le temps d'une semaine.

La MEMO, quant à elle, est une anti-chambre pour l'OIM et permet aux six étudiants qui ont manqué de se qualifier pour l'OIM d'avoir la possibilité de participer à une Olympiade internationale. Une des particularité de la MEMO réside dans un concours par équipe en plus de la compétition individuelle traditionnelle. Lors du concours par équipe, les sélections de chaque pays travaillent ensemble sur le même examen. On renforce ainsi les liens sociaux et les étudiants ont également la possibilité de comparer en temps réel les méthodes de travail de chacun. La MEMO regroupe dix pays d'Europe centrale qui se succèdent chaque année pour accueillir la compétition. La MEMO a lieu à la fin du mois d'août et dure également une semaine.

Chaque année, à travers plusieurs étapes de sélection, les six meilleurs collégiens helvètes se qualifient pour représenter la Suisse à l'OIM et les quatre meilleures filles sont sélectionnées pour participer à l'EGMO. Le tour préliminaire, ouvert à tous les lycéens de moins de vingt ans, a lieu au début du mois de décembre. Les vingt-cinq meilleurs Suisses se qualifient pour le tour final qui a lieu au mois de mars. A la suite du tour final, les douze meilleurs sont sélectionnés pour une ultime étape de sélection en mai au terme de laquelle l'équipe nationale est déterminée. Les six viennent-ensuite participent à la MEMO. Tous nos examens sont systématiquement traduits en français, en allemand et en anglais. Au besoin, nous produisons également une version italienne. Les étudiants sont, bien entendu, libres de répondre dans la langue qui leur convient.

Pour préparer au mieux les élèves, des rencontres de préparations sont organisées avant chaque sélection. En particulier, les néofites ont la possibilité de suivre trois journées de préparation avant la tenue du tour préliminaire. Durant ces journées, les différents sujets examinés sont présentés pour que les nouveaux puissent se familiariser avec les mathématiques olympiques (différentes des mathématiques scolaires par leur contenu). Le format ressemble à celui d'un cours où l'accent est mis sur le raisonnement et les preuves, plutôt que sur le calcul méthodique (à lire [5]). Des exemples précis de problèmes sont abordés et les élèves ont également du temps à disposition pour résoudre certains problèmes par eux-mêmes. Les rencontres ont lieu simultanément à Lausanne, Zurich et Lugano dans la langue correspondante.

De plus, depuis cette année, un Junior Camp est organisé au début du mois de juin. S'inspirant d'un modèle existant dans d'autres pays, le Junior Camp est destiné aux jeunes participants malheureux du premier tour âgés de moins de seize ans. Le raisonnement pur, la rédaction d'une preuve ou simplement la nouvelle matière mathématique sont des notions difficiles à apprivoiser pour les plus jeunes et, parfois même, effraient les routiniers. Le Junior Camp offre une possibilité, le temps d'un weekend, de s'entrainer à un rythme adapté sur ces différents aspects et ce de manière ludique. En effet, l'accent est également mis sur les activités sociales. Le Junior Camp propose ainsi un évènement supplémentaire à ceux qui ont manqué la qualification pour le tour final et augmente leur chance de se qualifier l'année suivante.

Parmi les autres évènements majeurs du calendrier, un camp d'une semaine est organisé au début du mois de mars pour les qualifiés du premier tour. Il se clôture par l'examen du tour final. Durant cette semaine, les étudiants travaillent les mathématiques durant la journée, puis participent à des activités sociales en fin d'après-midi et en soirée. Nous tenons à cœur de maintenir une ambiance fraternelle et de ne pas exacerber l'esprit compétitif. Les participants sont invités à partager leur raisonnement et à travailler en commun sur les problèmes les plus récalcitrants. Nous essayons tant que possible de susciter la curiosité des élèves et à les sensibiliser à la beauté des arguments mathématiques.

Figure 1 – Programme de l'édition 2018/2019 des Olympiades suisses de mathématiques

Nous travaillons depuis quelques années à populariser les Olympiades en Suisse pour qu'elles deviennent un évènement reconnu incontournable et un objectif chez tous les férus de mathématiques en Suisse. Tous les professeurs de mathématiques de Suisse sont ainsi cordialement conviés à présenter les Olympiades de mathématiques à leurs classes et à motiver les plus friands à s'inscrire aux rencontres de préparation du premier tour. Toutes les informations pratiques sont disponibles sur notre site internet [1]. La participation est entièrement gratuite (les frais de transport sont systématiquement remboursés). Au delà des mathématiques, les Olympiades offrent une possibilité en or de voyager et de lier de nouvelles amitiés avec d'autres jeunes du monde entier. Nous sommes convaincus qu'il s'agit là d'une véritable expérience humaine aux profits sociaux incommensurables.

2 Un exemple pour la route

Ne prenez pas peur ! Même si les problèmes proposés aux Olympiades font parfois naître une certaine réticence chez les professionnels de l'enseignement de par leur hermétisme apparent, il va de soi qu'avec l'apprivoisement adéquat il n'y a plus rien à craindre. Le problème suivant provient de l'OIM 2011 à Amsterdam. Selon la plupart des experts actifs dans le monde des Olympiades aujourd'hui, il s'agit là d'un des plus beaux problèmes jamais proposés lors d'une OIM. L'énoncé est le suivant :

> **OIM 2011, Problème 2.** Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de points du plan, contenant au moins deux points. Supposons que S ne contienne pas trois points alignés. On appelle *moulin* le processus suivant : le processus commence avec une droite ℓ contenant un unique point P de $\mathcal{S}$; la droite l tourne, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour du point P, appelé *pivot*, jusqu'à ce qu'elle rencontre pour la première fois un autre point de $\mathcal{S}$; ce point, Q, devient le nouveau pivot ; la droite continue alors sa rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de Q, jusqu'à rencontrer un nouveau point de $\mathcal{S}$; ce processus continue indéfiniment. Montrer qu'on peut choisir un point P de $\mathcal{S}$ et une droite ℓ contenant P, de façon que le moulin à vent commençant par ℓ utilise chaque point de $\mathcal{S}$ comme pivot une infinité de fois.

En lisant uniquement la solution présentée ci-dessous, le problème pourrait paraître simple. Les arguments de la solution sont en effet faciles à comprendre et ne requièrent aucun outil mathématique sophistiqué. Et là est toute la beauté des problèmes olympiques ! Des énoncés simples qui admettent des preuves astucieuses ne nécessitant aucune mathématique avancée. Toutefois, cette beauté est aussi source de difficulté accrue.

La solution se présente comme suit. Il s'agit de choisir un bon point et une bonne droite. En adaptant notre point de vue, on commence par supposer que deux points de $\mathcal{S}$ ne se trouvent pas sur la même droite verticale. On choisit ensuite un point P de $\mathcal{S}$ tel que la droite verticale qui passe par P sépare les autres points de $\mathcal{S}$ en deux sous-ensembles dont la taille diffère d'au plus 1 (si le nombre d'éléments dans $\mathcal{S}$ est impair, alors P peut être choisi tel que les deux sous-ensembles aient le même nombre d'éléments, si nombre d'éléments dans $\mathcal{S}$ est pair, alors il y aura toujours au moins un élément en plus dans l'un des deux sous-ensembles). On prétend que choisir ce point P et la droite ℓ comme étant la droite verticale (orientée) par P fonctionne.

En effet, colorions les points à gauche de ℓ en rouge, ceux à droite en bleu et P en blanc. L'observation clef est la suivante : à chaque changement de pivot, l'ancien pivot passe du coté de la droite ℓ d'où provient le nouveau pivot. En re-coloriant les points par rapport à la nouvelle position de ℓ, ceux à gauche en rouge, ceux à droite en bleu et le nouveau pivot en blanc, on conserve donc le même nombre de points de chaque couleur.

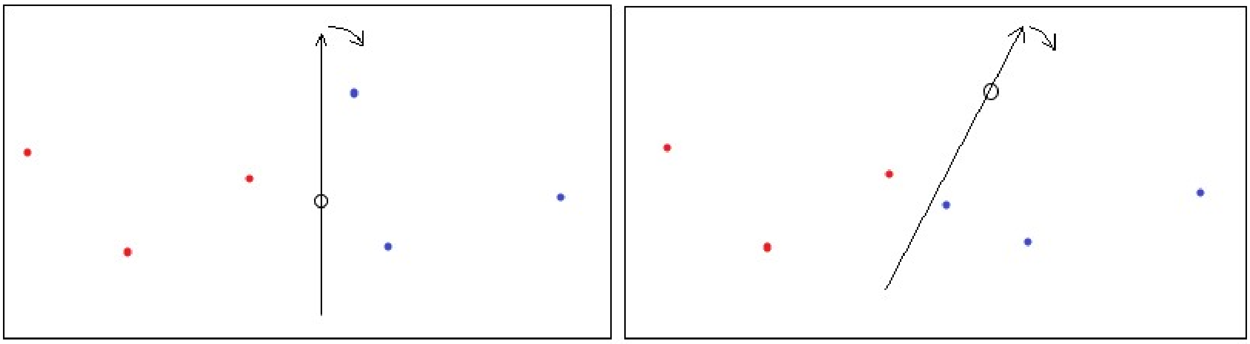

Figure 2 – Situation initiale lorsque $\mathcal{S}$ contient sept points. Au premier changement de pivot, on observe que l'ancien pivot passe à droite de ℓ et donc devient bleu, i.e. l'ancienne couleur du nouveau pivot devenu blanc.

La droite ℓ était initialement verticale. Après un certain nombre de changements de pivot, la droite aura tourné de 180°. Il n'est pas clair a priori par quel point de $\mathcal{S}$ passera la droite ℓ à ce moment-là. Or, rappelons que le nombre de points de chaque couleur est conservé et que la droite a effectué un demi-tour. Notez qu'après un demi-tour, on a permuté les notions de droite et de gauche par rapport à ℓ, ainsi les points rouges, présents en nombre constant, sont désormais à droite de ℓ et les points bleus à gauche. Par conséquent, le point de $\mathcal{S}$, par lequel passe ℓ à présent, est soit P, soit un des deux points voisins (voisins selon l'abscisse). En particulier, chaque point a changé de couleur au moins une fois et donc chaque point a été utilisé au moins une fois comme pivot après que ℓ ait effectué un demi-tour. En continuant de tourner ℓ ainsi une infinité de fois, on utilise bien chaque point comme pivot une infinité de fois. CQFD

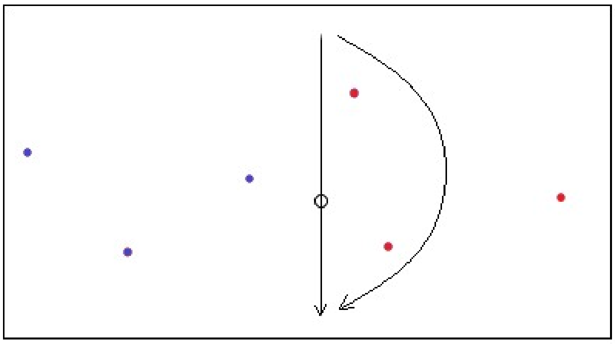

Figure 3 – Situation lorsque ℓ a effectué un demi-tour. Pour les raisons de constance dans le coloriage expliquées plus haut, le pivot actuel doit être le pivot initial (car 7 est impair). Comme la droite et la gauche de ℓ sont inversées après un demi-tour, les points ont changé de couleurs.

Références

[1] *Verein Schweizerischer Mathematik-Olympiaden* (www.imosuisse.ch)

[2] *International Mathematical Olympiad* (www.imo-official.org)

[3] *European Girls' Mathematical Olympiad* (www.egmo.org)

[4] *Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden* (www.science.olympiad.ch)

[5] *Couvrez cette calculatrice que je ne saurais voir : le retour du raisonnement à l'école* (https ://science.olympiad.ch/fr/actuel/detail/news/news/couvrez-cette-calculatrice-que-je-ne-saurais-voir-le-retour-du-raisonnement-a-lecole/)